Canadian Journal of Regional Science
La Revue Canadienne des Sciences Régionales IV, 1 (1981). ©IPA 1981

LES FONDEMENTS DE LA LOI DE DENSITE URBAINE DE C. CLARK*

Jean-François Goux
Centre de recherches économiques
Université de Saint-Etienne
Saint-Etienne, 42100, France

Introduction

La loi de densité urbaine de C. Clark, connue sous la forme suivante: $D(x) = A \exp(bx)$, où $D(x)$ est la densité résidentielle et x la distance au centre de la ville, semble être une des plus solides en analyse urbaine. C'est à la fois un modèle de consommation de sol[1] (en intensité), de localisation résidentielle et de forme urbaine. Cette loi a été utilisée et vérifiée dans de nombreux cas en ce qui concerne la population urbaine[2], mais elle peut s'appliquer aussi aux densités commerciales : Y. Fréville [14], aux densités d'emploi : C. Clark [11], [10], E.S. Mills [23], R.L. Moomaw [26], etc... aux densités de construction : M. Echenique [13], M.A.O. Ayeni [3]. Beaucoup d'auteurs ont utilisé une formulation du même type pour expliquer les valeurs fonçières : en particulier J.J. Granelle [19] ou le prix des logements : Richardson [31]. Ce qui est plus intéressant encore, c'est qu'il a été possible de montrer que la densité de population pouvait être utilisée comme variable explicative fondamentale dans de nombreux cas : densités commerciales et coûts d'aménagement par Y. Fréville [14], valeurs foncières par les auteurs néo-classiques de la "nouvelle économie urbaine", etc...

Dans un premier temps, après avoir rappelé les mécanismes du modèle originel de C. Clark, nous dresserons un panorama des diverses généralisations ultérieures visant à en accroître l'efficience. Ensuite, nous présenterons rapidement les quelques

* Cet article est la synthèse de deux communications, l'une au colloque de l'Association Canadienne des Sciences Régionales (Montréal, juin 1980), l'autre au colloque de l'Association de Science Régionale de Langue Française (Dijon, France, septembre 1980).

[1] Pour une présentation générale de cette question on se reportera à J.F. Goux [18] et [16].

[2] Signalons la récente comparaison internationale réalisée par Glickman et White [15].

recherches — assez peu nombreuses — visant à déterminer les fondements théoriques de ce modèle.

Enfin, nous proposerons une interprétation qui met l'accent sur le point suivant : le modèle de C. Clark est un modèle composite qui confond deux densités (densité d'habitation et densité de construction) en une seule qu'il convient donc de traiter séparément. La densité de construction est un processus de long terme qui relève plus d'une analyse historique que d'un modèle de localisation optimale en raison de l'inertie des facteurs à prendre en compte. Par contre, en ce qui concerne la densité d'habitation, c'est-à-dire la localisation des résidents par rapport à l'espace construit et non au sol, il est possible de proposer un modèle théorique fondé sur le prix des logements et les revenus des ménages.

Les généralisations de la loi de C. Clark

Après une brève présentation du modèle originel de C. Clark, nous verrons plus en détail les généralisations apportées ultérieurement à ce premier modèle par d'autres auteurs. Celles-ci ont concerné plus spécialement la forme de la fonction.

Le modèle originel

D'après C. Clark "la loi fondamentale est que la densité tend à décroître comme une fonction exponentielle négative de la distance au centre de l'espace urbain" [10: 341]. Il admet qu'il n'a fait que redécouvrir cette loi après Bleicher (1892). La formule mathématique est la suivante:

$$D(x) = A \exp(bx) \qquad \text{avec } b < 0 \qquad (1)$$

D (x) est la densité brute de la population résidente située à la distance x du centre de la ville, le terme exp signifie exponentielle.

Il apparaît immédiatement que A est la densité théorique au centre de la ville. Cela se démontre facilement en égalisant x à zéro. D'après C. Clark la valeur du coefficient b est liée à l'étendue de la ville. Il sera variable selon la taille de celle-ci. D'après lui, b est déterminé en première instance par les conditions de transport et ensuite par le niveau des revenus.

C. Clark a procédé à un certain nombre d'ajustements sur 61 villes et à des dates différentes [10: 349-50]. Cela lui permet de préciser la décroissance historique de la densité au centre. Les résultats montrent également que dans les villes où les coûts de transport sont élevés, b est élevé. C. Clark pense que dans les villes modernes on pourra réduire la valeur de b et par là même réduire les densités à proximité du centre des villes.

Cette loi a été testée de nombreuses fois et pour de très nombreux pays. En ce qui concerne le cas de la France, signalons surtout les travaux de Fréville [14] et de Bussière [7]. Mais le caractère sommaire de la formulation originelle de C. Clark a incité de nombreux auteurs à proposer des compléments théoriques et des améliorations.

Les changements dans la forme mathématique de la fonction

Il y a eu ces dernières années de nombreuses tentatives de comparaison entre les différentes formes possibles, citons entre autres Bussière [8], Casetti [9], Sibley [34], Latham et Yeates [21], Shachar [32] et MacDonald et Bowman [22]. Mais la présentation la plus complète et la plus pertinente est certainement celle de Zielinski [41] dont nous allons nous inspirer, en modifiant certaines références.

La forme "génératrice" des différentes fonctions utilisées pour rendre compte de manière plus pertinente du phénomène mis en évidence par C. Clark s'apparente à une fonction gamma incomplète du type suivant:

$$D(x) = Ax^{d} \exp(bx + cx^{2}) \qquad (2)$$

où A, b, c et d sont des paramètres.

En annulant a priori l'un ou l'autre de ces paramètres on retrouve la plupart des formulations connues.

$d = 0$; $D(x) = A \exp(bx + cx^2)$; Newling [29] (3)

$b = 0$; $D(x) = Ax^d \exp(cx^2)$; Amson [2] (4)

$c = 0$; $D(x) = Ax^d \exp(bx)$; Tanner [38] (5)

d et $c = 0$; $D(x) = A \exp(bx)$; Clark [11] (1)

d et $b = 0$; $D(x) = A \exp(cx^2)$; Sherrat [33] (6)

b et $c = 0$; $D(x) = Ax^d$; Smeed [36] et implicitement Stewart [37] et Tanner [38] (7)

D'autres formulations ont été proposées, parmi les plus simples notons celle de Mills [23] où x représente le rayon de la ville :

$$D(x) = A[B + b(x - x)]^d \qquad (8)$$

La formulation de Pearce, Simpson et Venables [30] est également intéressante et peut être généralisée de la manière suivante :

$$D(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad (9)$$

MacDonald et Bowman [22] proposent, à la suite d'une suggestion de Mills, une formule plus particulière où:

$$D(x) = A \exp(bx + cx^{-1}) \qquad (10)$$

La relation (11) apparaît comme relativement proche de la relation (3) retenue par Newling. On peut les synthétiser en une formule plus générale du type:

$$D(x) = A \exp(bx + cx^e) \qquad (11)$$

Lorsque $e = 2$ on retrouve la formulation de Newling, lorsque $e = -1$ celle de MacDonald et Bowman, lorsque $e = 0$ ou 1 celle de C. Clark.

Ceci nous amène à proposer une forme "génératrice" plus large que celle de l'équation (2) en introduisant un cinquième paramètre :

$$D(x) = Ax^d \exp(bx + cx^e) \qquad (12)$$

Toutes ces modifications apportées au modèle originel de C. Clark sont intéressantes dans la mesure où le planificateur urbain a ainsi à sa disposition une panoplie très vaste de modèles mathématiques.

Mais le défaut essentiel de ces recherches, à quelques exceptions près, est de considérer comme un modèle de comportement ce qui n'est qu'une relation empiriquement constatée. On peut très bien ajuster une fonction plus ou moins complexe et rendre compte ainsi du phénomène étudié, mais il faut être très prudent dans les conclusions que l'on peut en tirer. Ainsi constater que la population se répartit dans l'espace urbain d'une certaine manière ne peut pas permettre d'en induire automatiquement qu'il s'agit d'un comportement autonome de sa part : *sa localisation dépend des espaces construits capables de l'accueillir.* Ces modèles ne prennent pas en compte de contraintes, à part Muth [27; 28] et les travaux et les auteurs qui s'en inspirent; ils se condamnent ainsi à représenter la réalité sans l'expliquer.

Critique des explications traditionnelles

Certains, admettant la forme exponentielle de la fonction, cherchent surtout à expliquer la valeur des paramètres. D'autres ont une approche plus ambitieuse visant à une explication globale du phénomène. C'est dans cette deuxième direction que se situe notre propre recherche.

Expliquer la valeur des paramètres ne peut être de toute manière qu'une étape postérieure à la définition du modèle global dans lequel s'insèrent ces paramètres. On trouvera dans les articles et ouvrages de Clark [11], Mills [23], Muth [27; 28], Newling [29], Windsborough [40], Glickman et White [15], Berry, Simmons et Tennant [5] et Bussière [6; 7] une liste de facteurs susceptibles d'expliquer la densité centrale et une étude des facteurs de variabilité du gradient de densité.

On retiendra surtout de ces travaux le poids de la localisation des emplois et des commerces, celui des conditions de logement et bien entendu l'influence du coût et de la nature du transport. On ne saurait donc reprocher aux auteurs de ces recherches de négliger les contraintes qui pèsent sur la localisation des ménages, mais ce qui est en partie contestable, c'est de ne les prendre en compte qu'à travers la valeur des paramètres. Est-ce à dire que la forme de la fonction n'a qu'un caractère technique comme Mills [23: 50] le prétend : "la justification de l'usage de la fonction de densité exponentielle négative dans cette étude et dans d'autres est la facilité de calcul (computational convenience). . ."?

Parmi ceux qui n'acceptent pas une telle position, il y a trois grandes catégories d'explication de la forme de la fonction. L'une, qui à la suite des travaux de Muth [28] fait appel à la théorie économique[3]; les deux autres, d'ordre essentiellement mathématique, utilisant des analogies physiques : modèle gravitaire et entropie. Ces dernières recherches, dans la lignée de Wilson [39] et de Bussière [7] présentent de grandes qualités techniques. Le modèle est cohérent et les vérifications empiriques attestent de sa pertinence. C'est sans doute un excellent outil de planification urbaine. Mais on ne peut pas s'empêcher de penser à la lecture de la démonstration que la forme de la fonction est expliquée plus par un artifice mathématique que sur une base théorique qui fait largement défaut. En outre, ce modèle ignore complétement les contraintes de l'offre d'espaces construits. Les ménages sont localisés "en l'air" dans un espace vide où tout est possible. En d'autres termes, il y a un postulat

[3] Voir également Mills [24], [23].

implicite de parfaite élasticité de l'offre d'espaces construits. Cette hypothèse est contradictoire avec la réalité du processus de production des espaces urbains[4] : les délais de réaction sont très longs ce qui rend un modèle d'équilibre parfaitement inadapté et les agents qui maîtrisent l'offre ont une logique de profit qui ne correspond pas obligatoirement à la logique des besoins des ménages. Le grand mérite du modèle de Muth [28] est précisément de ne pas totalement négliger cette contrainte.

Il existe deux versions du modèle de Muth, l'une plus ancienne et plus simple [28], l'autre plus complexe et plus élaborée [27] ayant subi l'influence de W. Alonso [1], et qui considère la précédente comme un cas particulier; mais l'une et l'autre ont les mêmes fondements théoriques, que nous allons brièvement rappeler.

Conformément au schéma néo-classique traditionnel, Muth distingue deux catégories d'agents : les consommateurs et les producteurs de logement. Dans une première étape, il étudie l'équilibre spatial des consommateurs, puis dans une deuxième, celui des producteurs, et, dans une dernière étape, l'équilibre général.

Chaque ménage cherche à maximiser une fonction d'utilité à deux composantes (les services de logement et les autres biens et services sauf le logement et le transport) sous la contrainte de son revenu intégralement dépensé, en services de logement, autres biens et services et transport. Outre les conditions d'optimisation classiques, cela permet de déterminer un équilibre spatial tel que le ménage ne puisse accroître son revenu réel en changeant de localisation (le prix du service de logement étant la variable duale des coûts de transport). Postulant que l'élasticité de la demande par rapport au prix est proche de -1 et montrant que le prix suit une loi exponentielle négative, Muth démontre que la consommation croît exponentiellement avec la distance au centre.

Dans le cas du producteur, la valeur de la production est déterminée à l'aide d'une fonction de Cobb-Douglas. La firme maximise son profit de manière classique, mais en intégrant le facteur localisation à travers la rente du sol. Cela permet de démontrer l'influence du prix du service de logement sur la densité de production. On en déduit qu'elle décroît exponentiellement avec la distance au centre.

A l'équilibre, la synthèse des deux comportements précédents permet de conclure que la densité de population est distribuée selon une fonction exponentielle négative de la distance au centre.

[4] Cf. Goux [17].

On peut faire à ce modèle des critiques d'ordre technique, suivant en cela Sirmans et Redman [35] mais ce n'est pas notre objet. Que la fonction de production soit CES ou VES, c'est son utilisation qui pose problème. Prétendre expliquer la forme générale d'une ville à l'aide d'une simple fonction de production relève d'un réductionnisme économique étroit. Même dans le cas des villes américaines dont certaines sont récentes, il est difficile d'évacuer l'histoire[5]; quant aux villes européennes, la question ne se pose pas. L'hypothèse de la fonction de production est trop lourde.

D'autre part, les astuces mathématiques ne sont pas non plus absentes de ce travail. Si le résultat final est une fonction exponentielle négative, c'est parce qu'il est admis que le prix des logements s'explique également à l'aide d'une fonction de ce type. Une autre forme se traduirait par un résultat différent. L'hypothèse de la fonction de production n'apporte donc strictement rien.

L'intérêt essentiel de ce modèle réside dans la distinction qu'il opère entre la répartition des constructions et celle des occupants. Muth montre clairement qu'il y a là deux logiques différentes qu'il convient de distinguer. En outre, ce modèle fait apparaître les contraintes de localisation à travers la forme de la fonction et non simplement au niveau des paramètres, ce qui lui confère une supériorité incontestable sur beaucoup d'autres études. C'est donc dans cette perspective que nous allons poursuivre.

Un modèle composite

Comme le montre le modèle de Muth, la loi de C. Clark confond deux densités en une seule; d'une part la densité de construction (surface de plancher / surface de sol) et la densité d'habitation (nombre de personnes / surface de logements) que l'on peut interpréter effectivement comme l'inverse de la fonction de demande de logement par habitant. On remarquera qu'on ne peut pas regrouper directement la densité de construction et la densité d'habitation puisque la première fait référence aux espaces construits quel qu'en soit l'usage alors que la deuxième ne fait référence qu'au logement.

C'est cette décomposition que nous allons tout d'abord présenter avant d'en illustrer l'intérêt à partir de l'exemple de l'agglomération lyonnaise.

[5] Voir à ce propos Harrison et Kain [20].

La décomposition du modèle
Une ville vit selon des rythmes différents, l'histoire de ses constructions n'est pas celle de ses habitants et donc réduire l'une par rapport à l'autre est impossible. La ville est avant tout un ensemble de constructions et non un gigantesque terrain à bâtir vide où tout est possible; elle se caractérise par une très grande inertie. Les modifications qui l'atteignent sont toujours très lentes à produire leurs effets et souvent d'un poids négligeable par rapport à l'ensemble de l'agglomération. La ville, en tant qu'infrastructure matérielle, évolue dans le long terme. Sa forme générale, elle l'a souvent depuis des dizaines d'années, voire même depuis un siècle ou deux.

Bien sûr des modifications se produisent continuellement, des immeubles sont détruits, d'autres construits, certains changent d'affectation. La ville s'étale dans l'espace. Ceci est au minimum du domaine du moyen terme, on ne produit pas un immeuble en quelques jours.

A court terme, seuls les habitants sont mobiles et peuvent changer de localisation rapidement. Il y a donc des densités différentes évoluant à des rythmes totalement différents et qu'il convient donc d'analyser séparément : la densité de construction ou de logement (Dc) et la densité d'habitation (Dh). La multiplication des deux permet de retrouver la densité de population (Dp).

La répartition des constructions et des logements
Elle a surtout un caractère historique. Elle est le résultat de strates successives de constructions nouvelles qui soit se substituent, soit s'ajoutent aux constructions anciennes. Or, jusqu'à la fin du siècle dernier, la hauteur de ces constructions était fortement dépendante des contraintes techniques de production qui empêchaient de construire au-delà d'une certaine hauteur (système des murs porteurs). Quant au rythme de construction, il était surtout fonction des conditions économiques du moment. Et bien entendu, en fonction de l'attrait de la zone considérée, lui-même variable selon les époques. On peut évidemment considérer qu'il y a toujours eu une attirance pour le centre et donc que la plus ou moins grande proximité du centre rendait les zones plus ou moins attractives. Mais, le centre s'est souvent déplacé au cours des périodes historiques, tout simplement parce que le centre administratif ne se confond que rarement avec le centre religieux, puis le centre politique, enfin le centre des affaires et que dans l'histoire c'est alternativement ou concurremment l'un ou l'autre de ces centres qui a joué le rôle principal. Et aujourd'hui, il est bien difficile de déterminer ce qui va constituer le centre, surtout dans le cas d'une grande ville.

Quant à la forme de la loi de densité, seule une étude historique propre à chaque ville pourrait permettre de l'expliquer. La forme la plus probable étant, d'après Bussière [8] et Wilson [39] la loi exponentielle négative, c'est elle qui sera retenue en premier lieu. Une spécification plus précise de celle-ci peut néanmoins être proposée.

En retenant différentes formes géométriques susceptibles de correspondre à la réalité, deux cas de figure semblent possibles : soit la courbe présente un "cratère" dû à une diminution de la densité centrale de logement, soit la décroissance est continue à partir du centre où la densité est maximale. Dans ce dernier cas on retrouve la formulation traditionnelle de C. Clark :

$$D_c(x) = D_o \exp(bx) \qquad \text{avec } b < 0 \qquad (1)$$

soit une formulation dérivée, dont l'aspect géométrique est plus proche d'une courbe en cloche, proposée par Sherratt [33]:

$$D_c(x) = D_o \exp(bx^2) \qquad \text{avec } b < 0 \qquad (6)$$

"L'effet de cratère" peut être simulé par une équation semblable à celle retenue par Newling [29], c'est-à-dire :

$$D_c(x) = D_o \exp(bx + cx^2) \qquad \text{avec } b>0 \qquad \text{et } c<0 \qquad (3)$$

Si la formulation (1) est la meilleure des trois, signifiant ainsi l'absence "d'effet de cratère", il faudra alors tester l'existence d'une éventuelle diminution de la décroissance avec une équation de type (3) mais telle que $b < 0$ et $c > 0$, $|b| > |c|$.

La densité d'habitation
La consommation de logement par personne (Q/B) est fonction du loyer des logement (p), des revenus (R) et du nombre de personnes (B) du ménage. En supposant qu'une part variable (h) du revenu soit consacrée aux dépenses de logement, on peut écrire :

$$\frac{hR}{P} = \frac{p.Q}{B}$$

Nous supposons ici, implicitement, que le revenu (R) est net des coûts de transport:

donc $\frac{Q}{B} = \frac{hR}{Bp} = \frac{Z}{p}$ avec $Z = hr / B$

$$\text{Log } \frac{Q}{B} = \text{Log } Z - \log p$$

$$\frac{d(\log Q/B)}{dx} = \frac{d \text{ Log } Z}{dx} - \frac{d \log p}{dx}$$

En supposant Z indépendant de la distance au centre, on obtient une formulation proche de celle de Muth où tout va dépendre de la fonction de prix. On retiendra une relation exponentielle suivant en cela l'hypothèse traditionnelle. Notons qu'il serait également possible de retenir une fonction puissance[6].

$$\text{Log } p = \text{Log } p_o + ax \qquad \text{avec } a < 0$$

d'où $\frac{d \text{ Log } p}{dx} = a$ et $\frac{d (\text{Log } Q/B)}{dx} = -a$

en intégrant on obtient :

$$\frac{Q}{B} = \alpha_1 \exp(-ax)$$

d'où dans ce cas, la densité d'habitation suivante :

$$Dh = \frac{B}{Q} = \beta_1 \exp(ax) \tag{1}$$

Supposer Z constant, cela veut dire que la valeur de h augmente en fonction de la distance au centre de manière à compenser la diminution de R, liée à l'accroissement des coûts de transport:

$$\frac{dh}{dx} / h = \frac{dR}{dx} / R \qquad \text{avec} \qquad \frac{dh}{dx} > 0$$

Dans la version la plus récente de son modèle [27], Muth examine les conséquences d'une variation du revenu individuel des ménages. Il abandonne, avec raison, cette hypothèse trop contraignante. Il démontre que lorsque le revenu d'un ménage

[6] Cf. J.J. Granelle [19].

augmente, sa localisation d'équilibre s'éloigne du centre, si l'effet sur les dépenses de consommation de services de logement est supérieure à l'effet sur la valeur du temps de transport. C'est incontestable dans le cadre des hypothèses adoptées par Muth, en particulier celle concernant l'équilibre de localisation. De toute manière, il apparaît que la répartition des revenus dans l'espace exerce une influence qu'il faut prendre en compte.

Suppons donc que Z, R et h soient variables:

$$\frac{dZ}{dx} = R\frac{dh}{dx} + h\frac{dR}{dx}$$

Si le revenu brut est constant, $dr/dx<0$ et le signe de dZ/dx sera fonction de la variation de h. Cette hypothèse, encore trop lourde, doit être levée; le revenu brut doit être considéré comme variable également. Dans ce cas le signe de dR/dx est indéterminé, la variation des coûts de transport pouvant être plus que compensée par la variation du revenu brut.

En outre, le centre des emplois industriels n'est pas forcément le centre urbain où se localisent plutôt les emplois administratifs (CBD des modèles américains). Muth [27: 86-90] envisage bien l'existence de centres secondaires, mais ne faudrait-il pas plutôt raisonner sur le cas *d'une couronne de centres secondaires?* Dans ce cas là, le signe de dZ/dx risque fort de ne pas être invariable. Il faut donc prévoir une diminution, voire un éventuel retournement de la tendance, ce que permet la fonction suivante :

$$\text{Log } Z = \text{Log } Z_o + bx + cx^2$$

d'où $\frac{d \text{ Log } Z}{dx} = b + 2\,cx$

donc $\frac{d (\text{Log } Q/B)}{dx} = b + 2cx - a = m + 2cx$ avec $m = b - a$

en intégrant on obtient:

$$\frac{Q}{B} = \alpha_2 \exp(mx + cx^2)$$

$$\text{et } D_h = \frac{B}{Q} = \beta_2 \exp(-mx - cx^2) \tag{3}$$

Le signe de m est indéterminé et dépend des valeurs de b et de a. On retrouve là un résultat classique de la théorie des choix du consommateur où l'effet de revenu et l'effet de substitution jouent en sens contraire.

Vérification

On va tout d'abord estimer séparément chacune des lois de densité avant de procéder à un test global. Présentons auparavant les données utilisées.

Les données

Le modèle sera testé à partir du cas de la zone urbaine de Lyon en retenant 43 communes périphériques et les 9 arrondissements de la ville. On attribuera au centre de chaque commune ou arrondissement la densité moyenne de la commune. Les distances sont calculées de centre à centre. Les chiffres datent de l'année 1975 (recensement général INSEE). Les densités de population et de logement sont directement issues du recensement.

La densité de logement sera mesurée à l'aide du rapport : nombre de logements / surface de la commune. Il aurait été préférable d'utiliser les surfaces de logement, mais ce chiffre n'était pas disponible. La densité d'habitation est le nombre de personnes par logement et la densité de population le rapport : nombre de personnes résidant à titre principal dans la commune / surface de la commune.

Afin d'équilibrer au mieux le modèle et conformément aux hypothèses concernant le rôle structurant des densités de construction, on retiendra le centre de gravité des constructions comme centre de la région urbaine[7]. C'est le ler arrondissement de Lyon qui sera ainsi considéré comme centre.

La densité de logement

C'est bien entendu la forme logarithmique qui a été utilisée dans les calculs. Les résultats sont les suivants[8] :

relation (1)

$$\text{Log } D_c\,(x) = \underset{(16{,}06)}{4{,}11} - \underset{(-10{,}87)}{0{,}31\,x} \qquad R^2 = 0{,}703 \text{ D.W.} = 1{,}49$$

[7] Si les densités de construction suivent une loi de type C. Clark, le centre de gravité n'est autre que le lieu de plus forte densité.

[8] Entre parenthèses la valeur du t de Student; R^2 est le coefficient de détermination et D.W. le coefficient d'autocorrélation de Durbin et Watson (souligné en l'absence d'autocorrélation).

relation (6)

$$\text{Log } D_c\,(x) = \underset{(14{,}23)}{2{,}96} - \underset{(-8{,}39)}{0{,}017\,x^2} \qquad R^2 = 0{,}585 \text{ D.W.} = 1{,}30$$

relation (3)

$$\text{Log } D_c\,(x) = \underset{(12{,}12)}{4{,}99} - \underset{(-5{,}40)}{0.60\,x} + \underset{(2{,}65)}{0{,}018\,x^2} \qquad R^2 = 0{,}740 \text{ D.W.} = 1{,}63$$

Tous les coefficients sont significatifs. Il n'y a pas "d'effet de cratère" ni de courbe en cloche. Par contre le résultat concernant la relation (3) met en évidence une diminution de la décroissance en s'éloignant du centre. Cela signifie que la densité de logement diminue légèrement moins que ne le prévoit une fonction exponentielle négative simple. Sans doute faut-il y voir l'influence de la surface des logements : le terme correctif en x^2 traduisant l'effet de la diminution de celle-ci au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre.

La densité d'habitation

Conformément à la théorie développée précédemment, deux formulations ont été testées; l'une est de type (1) classique, l'autre est de type (3).

relation (1)

$$\text{Log } D_h\,(x) = \underset{(29{,}22)}{0{,}82} + \underset{(8{,}98)}{0{,}03\,x} \qquad R^2 = 0{,}617 \text{ D.W.} = 1{,}54$$

relation (3)

$$\text{Log } D_h\,(x) = \underset{(16{,}21)}{0{,}69} + \underset{(6{,}09)}{0{,}07} - \underset{(-3{,}73)}{0{,}003\,x^2} \qquad R^2 = 0{,}702 \text{ D.W.} = 1{,}85$$

Contrairement à l'hypothèse de Muth, le coefficient de la relation (1) n'est pas négatif, ce qui signifie qu'il y a un autre phénomène qui contrecarre l'effet des prix : l'influence des revenus. Et conformément à ce qui était prévu, la prise en compte d'une modification de la tendance grâce à la relation (3) améliore significativement le résultat.

On peut déduire de la forme "en cratère" de la courbe que les ménages à revenus élevés sont attirés par le centre et la périphérie résidentielle (au delà de la couronne industrielle) et que l'influence des revenus est plus forte que celle des prix.

La densité de population
Elle correspond au produit des deux densités précédentes. Elle sera donc de la forme (1) si l'on retient l'équation la plus simple, et de la forme (3) si l'on retient le produit d'une forme simple et d'une forme complexe ou de deux formes complexes:

relation (1)

$$\text{Log } D_p(x) = \underset{(19{,}53)}{4{,}91} - \underset{(-10{,}01)}{0{,}28\,x} \qquad R^2 = 0{,}667 \text{ D.W.} = 1{,}49$$

relation (3)

$$\text{Log } D_p(x) = \underset{(13{,}80)}{5{,}67} - \underset{(-4{,}79)}{0{,}53\,x} + \underset{(2{,}29)}{0{,}015\,x^2} \qquad R^2 = 0{,}699 \text{ D.W.} = 1{,}59$$

Ces résultats sont particulièrement intéressants pour plusieurs raisons. D'une part, ils permettent de vérifier le bien-fondé de la décomposition de la densité de population. Sans faire celle-ci, on ne pourrait pas expliquer la valeur des paramètres qui théoriquement est égale à la somme des mêmes paramètres relatifs au logarithme des densités de logement et d'habitation. On peut le vérifier aisément en faisant la somme des logarithmes des densités de logement et d'habitation dans tous les cas possibles.

cas*	relation théorique**	relation empirique''
(1) + (1)	$\text{Log } D_p(x) = 4{,}93 - 0{,}28\,x$	$4{,}91 - 0{,}28\,x$
(1) + (3)	$\text{Log } D_p(x) = 4{,}80 - 0{,}24\,x - 0{,}003x^2$	$5{,}67 - 0{,}53x + 0{,}015\,x^2$
(3) + (1)	$\text{Log } D_p(x) = 5{,}81 - 0{,}57\,x + 0{,}018x^2$	$5{,}67 - 0{,}53x + 0{,}015\,x^2$
(3) + (3)	$\text{Log } D_p(x) = 5{,}68 - 0{,}53\,x + 0{,}015x^2$	$5{,}67 - 0{,}53x + 0{,}015\,x^2$

Seules les sommes de relations de forme identique donnent des résultats semblables; cela provient de ce que certains effets se compensent entre x et x^2 lorsqu'ils n'interviennent pas tous les deux dans chacune des équations. On remarquera surtout la dernière somme montrant l'exacte adéquation entre le résultat empiriquement constaté et le résultat théoriquement escompté, ce qui confirme la bonne spécification des différentes relations.

D'autre part, cela montre que le poids de la densité de logement est largement supérieur à celui de la densité d'habitation. On pourrait presque expliquer la densité de population uniquement à partir de la densité de logement à une constante près (la densité d'habitation moyenne de l'agglomération).

* Le premier chiffre concerne la densité de logement, le deuxième la densité d'habitation.

** Somme des deux fonctions calculées séparément.

'' Calcul direct.

Il faut d'ailleurs reconnaître, à l'actif de Muth, qu'il s'est posé ce problème dans son ouvrage de 1969 [27, chap. 8] et que, décomposant la densité de population d'une manière différente de la nôtre, il arrive à la conclusion suivante : l'influence de la consommation de services de logement est moins forte que celle de la production par unité de surface. Plus loin [27, chap. 12, p. 313], s'appuyant sur l'exemple de Chicago, il écrit : "il apparaît que l'influence principale sur le gradiant de densité s'exerce à travers les différences d'intensité dans la production de logement". Il chiffre même cette influence à 90 %. Nos conclusions sont identiques. C'est très important, car cela implique que ce que l'on analysait fréquemment comme une densité de population était plutôt une densité de logement. Une forme "en cratère" est due à une faible densité de logement — ceux-ci étant remplacés par des bureaux, des locaux commerciaux ou des administrations — plutôt qu'à un comportement de la population. *Les forces à analyser sont donc celles qui concernent la production des logements et non les mutations résidentielles de la population.* Cela ne veut pas dire que ces dernières soient sans intérêt, mais elles sont surdéterminées par les précédentes. Nous avons pu montrer, en effet, dans un ouvrage récent, Goux [17], que la production des espaces urbains s'expliquait essentiellement par la logique des offreurs plutôt que par celle des demandeurs.

Donc, si la forme générale de la densité de construction est due à des facteurs historiques, si la part des logements dans le total des constructions et plus généralement la densité de logement sont plutôt le fait des promoteurs immobiliers et des propriétaires fonciers que la résultante de la demande des ménages, si en outre la densité d'habitation n'apporte qu'un léger correctif à la densité de logement, la densité de population ne peut pas s'expliquer à l'aide d'un modèle de comportement des ménages.

Retour sur les généralisations

Le fait que de nombreux auteurs aient été amenés à proposer des modifications de la forme mathématique de la fonction de densité urbaine ne nous semble plus maintenant un simple exercice gratuit. Cela s'explique, comme dans notre propre cas, par les formes particulières prises par chacune des composantes du modèle. Ce n'est que dans le cas où la densité de logement et la densité d'habitation suivent une loi exponentielle simple que le modèle composite est conforme à la loi de C. Clark. Dans les autres cas cela justifie *et cela explique* l'emploi d'une forme mathématique plus complexe.

En supposant, par exemple, que la densité d'habitation soit une fonction puissance, on peut théoriquement retrouver, selon la forme de la densité de logement, une densité de population de type (2), (4), (5), ou (7). Nous disons bien théoriquement, car la faiblesse de certaines tendances, ou la présence d'effets contraires peut masquer et déformer les résultats attendus en ce qui concerne la densité de population; on vient de le voir dans le cas où les densités de logement et d'habitation ont des formes mathématiques différentes. Or, ce sont souvent ces cas là qui sont intéressants et que l'estimation empirique directe ne permet pas de déterminer. *Nous proposons donc de calculer la densité de population (théorique) à l'aide du produit des densités de logement et d'habitation calculées séparément.* Cela permet une approximation beaucoup plus fine et au caractère moins empirique de la densité de population.

Par exemple, en ce qui concerne la densité d'habitation, le calcul d'une fonction puissance donne le résultat suivant :

$$\underset{(23{,}89)}{\text{Log } D_h(x) = 0{,}77} + \underset{(9{,}21)}{0{,}146} \text{ Log } x \qquad R^2 = 0{,}629 \text{ D.W.} = 1{,}64 \qquad (7)$$

On peut y associer, des différentes formes de densité de logement, celles préconisées par Newling (3) ou C. Clark (1) déjà testées. Les différentes combinaisons possibles permettent de retrouver les lois théoriques suivantes :

relation (2), issue de (3) plus (7)

$$\text{Log } D_p(x) = 5{,}76 - 0{,}60x + 0{,}018\, x^2 + 0{,}146 \text{ Log } x \quad R^2 = 0{,}695$$

relation (5), issue de (1) plus (7)

$$\text{Log } D_p(x) = 4{,}88 - 0{,}31\, x + 0{,}146 \text{ Log } x \qquad R^2 = 0{,}652$$

Ces résultats sont satisfaisants et logiques alors que la détermination d'une fonction de type (2) ou (5) directement à partir des densités de population aboutissait à des relations dont la valeur des coefficients était quelquefois inexplicable et généralement non significative :

relation (2), estimation directe

$$\text{Log } D_p(x) = \underset{(12{,}76)}{5{,}81} - \underset{(-2{,}81)}{0{,}69\, x} + \underset{(1{,}98)}{0{,}02\, x^2} + \underset{(0{,}74)}{0{,}35 \text{ Log } x} \quad R^2 = 0{,}703$$

relation (5), estimation directe

$$\text{Log } D_p(x) = \underset{(17{,}47)}{5{,}11} - \underset{(-3{,}75)}{0{,}22\, x} - \underset{(-1{,}32)}{0{,}39 \text{ Log } X} \qquad R^2 = 0{,}679$$

Ainsi à partir du résultat concernant la relation (5), on pourrait penser que la densité d'habitation est une fonction puissance à coefficient négatif, ce qui est exactement le contraire de la réalité; de plus la valeur de ce coefficient n'est pas significative. Dans le cas de la relation (2), les différences avec la relation théorique sont bien moins importantes; par contre la non-significativité demeure. Seule la relation théorique permet de lever les ambiguïtés qui subsistent. Bien entendu, les coefficients de détermination sont moins élevés dans le cas théorique que dans le cas empirique; mais encore une fois, la faiblesse de cette différence (en moyenne 1 ou 2 %) plaide en faveur de la solution théorique.

Conclusion

Le modèle de C. Clark n'est pas fondamentalement une loi de population. Nous avons pu le démontrer à partir d'une analyse dichotomique mettant en évidence ce qui constitue le fondement de son modèle de densité urbaine : les densités de logement et d'habitation et le poids déterminant de la première. Si la densité de population s'explique par une fonction exponentielle négative ou une forme dérivée, c'est parce que la densité de logement suit une loi du même type.

En ce qui concerne la forme de la fonction, notre étude confirme les bonnes performances des plus simples. Certaines complications paraissent donc inutiles. Néanmoins une forme plus élaborée nous a permis de mettre en évidence de manière significative des phénomènes intéressants : surface du logement, différenciation spatiale de l'effet de revenu, etc...

D'une manière plus générale, la décomposition de la loi de densité de population permet de substituer une explication théorique à une justification empirique et conduit à une méthode de calcul de cette densité qui nous paraît beaucoup plus pertinente et fructueuse que l'estimation directe.

Références

1. Alonso, W. *Location and Use.* Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1964.
2. Amson, J.C. "Equilibrium models of cities : 1. An axiomatic theory", *Environment and Planning A,* vol. 4 (1972), 429-444.
3. Ayeni, M.A.O. "A predictive model of urban stock and activity : 1. theoretical considerations", *Environment and Planning A,* vol. 7, n° 8 (1975), 965-972.

4. Ayeni, M.A.O. "A predictive model of urban stock and activity : 2. empirical development", *Environment and Planning A*, vol. 8, n° 1 (1976), 59-77.
5. Berry, B., J.W. Simmons et R.J. Tennant. "Urban population densities : structure and change", *Geographical Review*, n° 53 (1963), 389-405.
6. Bussière, R. "Interactions urbaines", *Annales du C.R.U.* Paris : C.R.U., 1975.
7. Bussière, R. *Modèle urbain de localisation résidentielle.* Paris : C.R.U., 1972.
8. Bussière, R. *Morphologie urbaine, répartition de la population,* Paris : C.R.U., 1968.
9. Casetti, E. "Alternate urban population density models : an analytical comparison of their validity range" dans A.J. Scott (ed.) *Studies in Regional Science.* Londres : Pion, 1969.
10. Clark, C. *Population Growth and Land Use.* Londres : Macmillan, 1967.
11. Clark, C. "Urban Population Densities", *Journal of the Royal Statistical Society,* series A, 114, part 4 (1951), 490-496.
12. Derycke, P.H. *Economie et planification urbaines.* Paris : P.U.F., 1979.
13. Echenique, M., D. Crowther et W. Lindsay. "A spatial model of urban stock and activity", *Regional Studies,* vol. 3 (1969), 281-312.
14. Fréville, Y. *Recherches statistiques sur l'économie des finances locales,* thèse de doctorat ès sciences économiques, Rennes, 2 vol. + annexes, 1966.
15. Glickman, N.J. et M.J. White. "Urban land-use patterns : an international comparison", *Environment and Planning A,* vol. 11, n° 1 (1979), 35-50.
16. Goux, J.F. "La consommation de sol urbain", *Revue d'Economie Régionale et Urbaine,* n° 3-4, vol. 2 (1979), 382-401.
17. Goux, J.F. *Eléments d'économie immobilière.* Paris : Economica, 1978.
18. Goux, J.F. (1976) : "Recherches empiriques sur la consommation de sol par l'urbanisation" dans *Production d'espace et formes d'urbanisation ATP.* "Croissance urbaine" CNRS, Lyon, Saint-Etienne.
19. Granelle, J.J. *Espace urbain et prix du sol.* Paris : Sirey, 1970.
20. Harrison, D. et J.F. Kain. "Cumulative Urban Growth and Urban Density Functions", *Journal of Urban Economics,* vol. 1, n° 1 (1974), 61-98.
21. Latham, R.P. et M. Yeates. "Population density growth in metropolitan Toronto", *Geographical Analysis,* vol. 2 (1970), 177-185.

22. MacDonald, J.F. et H.W. Bowman. "Some tests of alternative urban population density functions", *Journal of Urban Economics,* vol. 3, n° 3 (1976), 242-252.
23. Mills, E.S. *Studies in the Structure of the Urban Economy.* Baltimore : Johns Hopkins Press, 1972.
24. Mills, E.S. "Urban density functions", *Urban Studies,* n° 7 (1970), 5-20.
25. Mogride, M.J.H. "Emploi des distributions gamma dans la planification urbaine au niveau de l'agglomération", *Annales 1974.* Paris : C.R.U., 1975.
26. Mooman, R.L. "An Econometric Analysis of Industrial Land Use Intensity within an Urban Area", *Urban Studies,* n° 15 (1978), 321-326.
27. Muth, R.F. *Cities and Housing.* Chicago : The University of Chicago Press, 1969.
28. Muth, R.F. "The Spatial Structure of the Housing Market", *Papers and Proceedings of the Regional Science Association,* vol. 7 (1961), 207-220.
29. Newling, B.E. "The Spatial Variation of Urban Population Densities", *Geographical Review,* avril (1969), 242-252.
30. Pearce, C., P. Simpson et W. Venables. "Urban density models" dans *Traffic Flow and Transportation.* New York : North Holland, 1972.
31. Richardson, H.W. *Urban Economics.* Londres : Penguin Books, 1971.
32. Shachar, A. "Patterns of population densities in the Tel-Aviv metropolitan area", *Environment and Planning A,* vol. 7 (1975), 279-291.
33. Sherratt, G.G. "A model for general urban growth" dans *Management Sciences : Models and Technics,* vol. 2 (1960), 147-159.
34. Sibley, D. "Density gradients and urban growth", *Urban Studies,* vol. 7, n° 3 (1970), 294-297.
35. Sirmans, C.F. et A.L. Redman. "Capital-land substitution and the price elasticity of demand for urban residential land", *Land Economics,* vol. 55, n° 2 (1979), 167-176.
36. Smeed, R.J. "The effect of some kinds of routing systems on the amount of traffic in the central areas of towns", *Journal of the Institution of Highway Engineers,* vol. 10, n° 1 (1963), 5-26.
37. Stewart, J.Q. "Empirical mathematical rules concerning the distribution and equilibrium of population", *The Geographical Review* (juillet 1947).
38. Tanner, J.C. "Factors affecting the amount of travel". Road Research Laboratory. Londres : H.M.S.O., 1961.

39. Wilson, A.G. ''A statistical theory of spatial distribution models'', *Transportation Research,* vol. 1, n° 3 (1968), 253-270.

40. Winsborough, H. *A Comparative Study of Urban Population Densities,* Thèse de doctorat de l'Université de Chicago, 1961.

41. Zielinski, K. ''Experimental Analysis of eleven models of urban population density'', *Environment and Planning A,* vol. 11, n° 6 (1979), 629-641.