Le coefficient de localisation et le coefficient de corrélation spatiale : une comparaison

André Lemelin
INRS-Urbanisation
3465, rue Durocher
Montréal QC H2X 2C6

Une ville est constituée de dix quartiers. La répartition de l'emploi entre les quartiers, pour l'ensemble et pour deux secteurs d'activité choisis, est donnée par [1] :

Quartier	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ensemble	0,30	0,25	0,15	0,10	0,08	0,05	0,03	0,02	0,01	0,01
Secteur I	0,40	0,32	0,18	0,10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Secteur II	0,10	0,25	0,15	0,10	0,08	0,05	0,03	0,02	0,01	0,21

Des deux secteurs choisis, lequel a la répartition la plus semblable à celle de l'ensemble des activités ?

En science régionale, la mesure classique qu'on utilise pour répondre à cette question est le coefficient de localisation (dont la définition exacte est donnée plus loin). Or il se trouve que les activités ont toutes deux un coefficient de localisation égal à 0,20. Pourtant, on a l'impression que la première activité a une répartition analogue à celle de l'ensemble, mais en quelque sorte plus contrastée, tandis que la seconde a une répartition beaucoup plus distincte.

Mais il y a d'autres façons de mesurer la similitude ou la déviance du déploiement d'une activité par rapport au schème de l'ensemble.

Cet article s'appuie sur une recherche réalisée dans le cadre de l'Entente de collaboration qui lie la Ville de Montréal et l'INRS-Urbanisation (Lemelin, 1990). L'auteur remercie Jacques Ledent, rédacteur en chef de cette revue, et un évaluateur anonyme pour leurs commentaires constructifs.

1. Ces données sont illustrées à la figure 1.

ISSN: 0705-4580
Printed in Canada/Imprimé au Canada

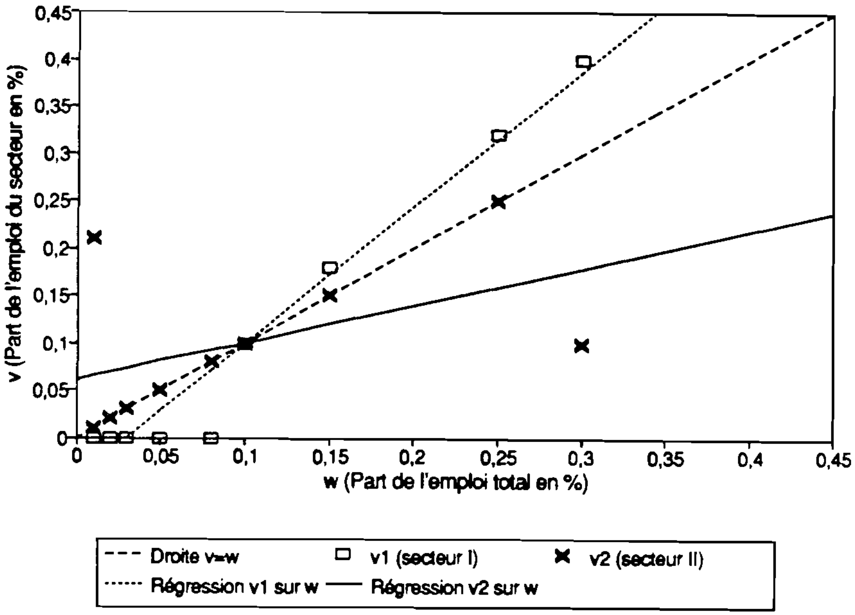

FIGURE 1 — Part de l'emploi par quartier (exemple fictif)

L'une d'elles est le coefficient de corrélation, couramment utilisé en statistique descriptive. Or le coefficient de corrélation spatiale de la première activité avec l'ensemble est de 0,96, alors que celui de la seconde est de 0,27.

Ce petit exemple illustre l'intérêt d'une utilisation complémentaire des deux indicateurs. La présente note a pour but de les comparer du point de vue de leurs propriétés et de leur interprétation.

Mis à part l'exemple fictif qui précède, les données utilisées pour illustrer la présentation sont tirées du Recensement des établissements et des emplois à Montréal (RÉEM). Ce recensement est le résultat d'un inventaire systématique, mené en 1988 sur le territoire de la ville de Montréal, de toutes les places d'affaires et des emplois qui leur étaient associés au moment de l'enquête [2]. Les données utilisées couvrent plus de trente-huit mille places d'affaires, où l'on dénombre plus de six cents mille emplois. Le découpage spatial utilisé pour analyser le déploiement des activités est celui des 54 quartiers de planification de la Ville de Montréal. La variable analysée est le nombre d'emplois par quartier et par activité économique.

2. Le RÉEM est une initiative conjointe de l'INRS-Urbanisation, de la Ville de Montréal et de la Commission Emploi et Immigration Canada à Montréal. On trouvera plus de détails dans Lemelin (1990).

Définition, propriétés et interprétation des indicateurs

Coefficient de localisation

Le coefficient de localisation de l'activité j, tel qu'il a été initialement proposé par Florence [3], se définit de la façon suivante :

$$CL_j = \frac{1}{2}\sum_i \left| (x_{ij}/x_{.j}) - (x_{i.}/x_{..}) \right|$$

où : x_{ij} = l'emploi du secteur j dans le quartier i.
$x_{.j}$ = l'emploi du secteur j dans tous les quartiers.
$x_{i.}$ = l'emploi de tous les secteurs dans le quartier i.
$x_{..}$ = l'emploi de tous les secteurs dans tous les quartiers.

Cette mesure varie entre zéro et un. Elle est égale à zéro lorsque, pour chaque quartier i, $(x_{ij}/x_{.j}) = (x_{i.}/x_{..})$, c'est-à-dire lorsque la répartition de l'emploi du secteur j est identique à celle de l'emploi de l'ensemble des activités. Elle peut atteindre sa valeur maximum dans deux cas de figure. Le premier cas est celui qui se produit lorsque l'emploi du secteur j est situé uniquement dans des quartiers d'où sont complètement absentes toutes les autres activités; le maximum est alors [4] $(1 - x_{.j}/x_{..})$; et si le secteur j est petit par rapport à l'ensemble, cette valeur maximum de CL_j est proche de 1,0. Le second cas se produit lorsque l'emploi du secteur j est concentré dans un seul quartier, disons le quartier k; le maximum est alors de $(1 - x_{k.}/x_{..})$; si le quartier k où est concentré l'emploi du secteur j est petit, la valeur maximum de CL_j est donc proche de 1,0.

Bien que la concentration dans un seul quartier de tout l'emploi d'un secteur constitue l'un des deux cas de figure où le coefficient de localisation atteint sa valeur maximum, le coefficient de localisation n'est pas une mesure de concentration [5]. Car, pour que le coefficient de localisation soit grand, il ne suffit pas que l'emploi du secteur concerné soit concentré, mais il faut encore qu'il soit concentré ailleurs que là où est concentré l'emploi des autres secteurs. D'ailleurs, si l'emploi de

3. Isard (1960 : 251). La littérature de science régionale abonde en suggestions d'indicateurs de toutes sortes (voir Aydalot, 1985, chap. 7; l'exposé d'Aydalot contient cependant des fautes typographiques et il est préférable de se reporter à Isard, 1960, p. 123-126 et chapitre 7, bien que cette dernière présentation soit plus lourde).
4. Il est à noter que, puisque par hypothèse le secteur j est seul dans les quartiers où il est présent, $x_{.j}$ est la somme de l'emploi dans tous les quartiers où le secteur j est présent.
5. On pourrait en faire une mesure de concentration si, au lieu de prendre comme base de comparaison la répartition spatiale de l'ensemble des activités, on prenait la répartition uniforme (ou toute autre répartition censée représenter une déconcentration maximale).

l'ensemble est moyennement concentré, un secteur dont l'emploi est réparti uniformément aura lui aussi un coefficient de localisation élevé. Le coefficient de localisation est donc bel et bien une mesure de la divergence entre deux distributions.

Coefficient de corrélation spatiale

Le coefficient de corrélation spatiale d'une activité avec l'ensemble est le coefficient de corrélation simple entre l'emploi par quartier de cette activité et l'emploi par quartier de l'ensemble des activités [6].

L'expression $(1 - r^2)$, qu'on interprète comme la fraction de la variance de chacune des variables qui n'est pas associée à celle de l'autre, peut se comparer au coefficient de localisation. Mais les deux indicateurs mesurent des choses très différentes.

Illustration : les activités économiques à Montréal

Le tableau 1 donne les valeurs du coefficient de localisation et du coefficient de corrélation spatiale pour dix-huit secteurs d'activité à Montréal. Comme on peut le constater, les deux indicateurs ne coïncident pas : le coefficient Spearman de corrélation de rang n'est entre eux que de 0,56.

La figure 2 permet de visualiser les divergences entre les deux indicateurs. Comme repère, la figure 2 présente deux droites de régression des coefficients de localisation sur les coefficients de corrélation pour les dix-huit secteurs : la première est calculée pour l'ensemble des dix-huit secteurs («Régression CL/r : 18 observations») et la seconde, pour douze secteurs, après élimination des secteurs excentriques par rapport à la droite de régression («Régression CL/r : 12 observations»). Le coefficient de détermination R^2 obtenu est de 0,38 dans le premier cas, et de 0,93 dans le second [7].

On constate que les secteurs excentriques tendent à se situer *au-dessus* de la droite de régression de CL sur r. Ce n'est probablement pas fortuit. En effet, si le coefficient de localisation est faible, il paraît

6. Le coefficient de corrélation simple entre les variables V et W est donné par :

$$r = \sigma_{vw} / (\sigma_v \sigma_w)$$

où σ_{vw} est la covariance entre les variables V et W et σ_v et σ_w, les écarts types. Dans le présent contexte, la variable V est l'emploi par quartier de l'activité j (x_{ij}, pour tous les quartiers i) et la variable W est l'emploi par quartier de l'ensemble des activités ($x_{i.}$, pour tous les quartiers i). De façon équivalente, on peut calculer le coefficient de corrélation en substituant $x_{ij}/x_{.j}$ à x_{ij} et $x_{i.}/x_{..}$ à $x_{i.}$.

7. Les secteurs jugés excentriques sont 1, 7, 8, 11, 12 et 13. Si on estime la régression en éliminant seulement les trois premiers, on obtient un r^2 de 0,78.

TABLEAU 1 — Indicateurs de localisation sectorielle

	Secteurs	Part de l'emploi	Coefficient de de localisation	Coefficient de corrélation
1	Industrie primaire	0,21	0,54	0,93
2	Ind. manuf. légère	7,76	0,51	0,32
3	Ind. manuf. interméd.	4,24	0,43	0,37
4	Ind. manuf. lourde	4,53	0,44	0,59
5	Ind. manuf. hte techn.	1,30	0,68	0,09
6	Construction	2,18	0,42	0,43
7	Transport et entrep.	3,01	0,48	0,92
8	Communic. et serv. publ.	3,81	0,50	0,95
9	Commerce de gros	4,88	0,31	0,68
10	Commerce de détail	10,74	0,23	0,93
11	Finance, assur. et imm.	8,90	0,35	0,97
12	Services aux entrepr.	8,99	0,33	0,98
13	Administr. publique	6,16	0,33	0,96
14	Éducation	6,59	0,37	0,64
15	Santé et serv. soc.	13,77	0,44	0,46
16	Héberg. et restaur.	6,81	0,22	0,97
17	Serv. aux consomm.	3,22	0,27	0,88
18	Autres services	2,91	0,20	0,96
19	Moyenne [a]		0,39	0,72
20	Écart type		0,12	0,28

a. Il s'agit de la moyenne arithmétique de l'ensemble des dix-huit secteurs entre lesquels ont été répartis les emplois dans Lemelin (1990).

improbable que le coefficient de corrélation puisse être faible [8]. Par contre, on voit que certains secteurs ayant un coefficient de localisation parmi les plus forts ont néanmoins un coefficient de corrélation spatiale élevé. C'est le cas notamment des secteurs 1, 7 et 8.

Pour illustrer les différences entre les deux indicateurs, nous allons donc comparer le schème de localisation de l'un d'entre eux, le secteur 8 (Communications et services publics), avec celui d'un secteur ayant un coefficient de localisation semblable, mais un coefficient de corrélation spatiale beaucoup plus bas : il s'agit du secteur 2 (Industrie manufacturière légère).

Les emplois associés à l'industrie légère se répartissent sur le territoire différemment de l'ensemble des emplois. Et ils sont un peu plus concentrés que la moyenne : on en retrouve près de la moitié (48 %) dans trois quartiers non centraux. L'industrie légère est ainsi sous-représentée dans les trois quartiers centraux, et fortement sur-

8. Comme le montrera la comparaison technique entre les deux indicateurs, cela exigerait que les écarts $(x_{ij}/x_{.j}) - (x_{i.}/x_{..})$ soient le fait de quelques quartiers seulement et, de plus, que la variabilité des parts des autres quartiers soit grande, de façon à rendre impossible un bon ajustement de la droite de régression des $x_{ij}/x_{.j}$ sur les $x_{i.}/x_{..}$.

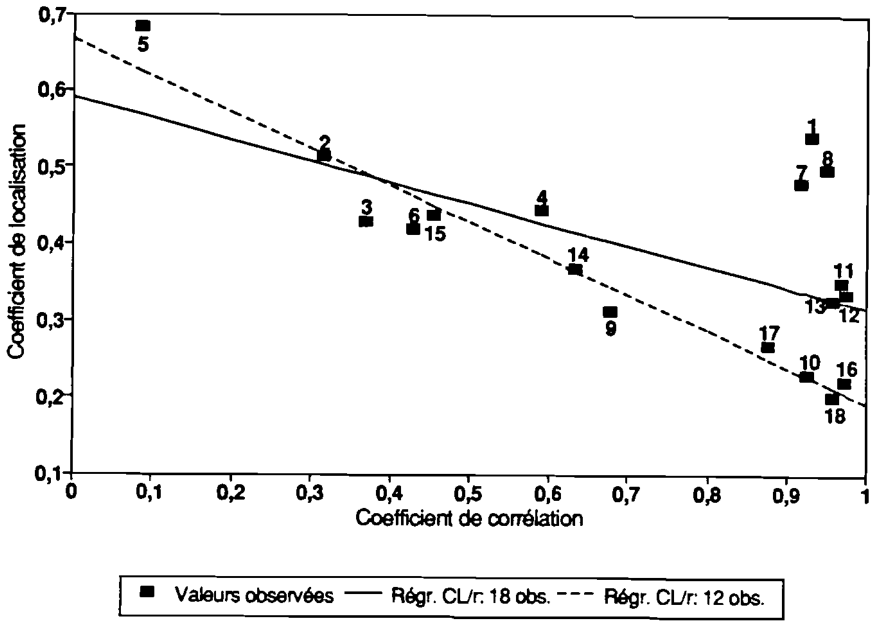

FIGURE 2 — Coefficient de corrélation et coefficient de localisation

représentée dans les trois quartiers où elle est concentrée. Ces écarts par rapport à la répartition générale expliquent le niveau élevé du coefficient de localisation. De plus, ces écarts sont contradictoires, en ce sens qu'ils se rapportent tous à des quartiers ayant une part de l'emploi total parmi les plus grandes [9] : il s'ensuit que le coefficient de corrélation spatiale est faible [10].

Le secteur des communications et services publics a un coefficient de localisation à peu près égal à celui de l'industrie légère. Mais alors que l'industrie légère est sous-représentée dans les quartiers centraux, le secteur des communications et services publics y est sur-représenté. En outre, ce secteur est exempt de l'«écartèlement» observé à la figure 3b (dont il sera question plus loin), ce qui explique que son coefficient de corrélation spatiale soit beaucoup plus élevé que celui de l'industrie légère.

9. Cela est représenté à la figure 3b, dont il sera question plus loin.
10. Comme le montrera la comparaison technique, cela vient de ce que, dans ces conditions, la droite de régression ne permet pas de concilier les deux distributions.

Comparaison technique entre coefficient de localisation et coefficient de corrélation

Deux différences essentielles

Les mesures examinées sont toutes deux fonction des écarts entre la part observée de chaque quartier dans l'emploi d'une activité donnée, et une certaine valeur de référence. Mais il y a entre elles deux différences essentielles. La première a trait au choix de la valeur de référence, et la seconde, au poids accordé à chacun des écarts.

Pour le coefficient de localisation, la valeur de référence choisie est la part de chaque quartier dans l'emploi global de l'ensemble des activités. Pour le coefficient de corrélation spatiale, c'est la part de chaque quartier qui est «prédite» par la droite de régression des $x_{ij}/x_{.j}$ sur les $x_{i.}/x_{..}$. Cette droite est de la forme

$$(x_{ij}/x_{.j}) = a + b\,(x_{i.}/x_{..})$$

Elle représente un modèle de localisation où l'emploi de l'activité j comprendrait deux fractions. La première, égale à $(1 - b)$ et qu'on peut associer à un coût fixe, serait répartie uniformément entre les quartiers; la seconde fraction, égale à b, serait répartie identiquement à l'emploi de l'ensemble des activités.

Ainsi, lorsque $(1 - r^2)$ est égal à zéro, il n'en est pas nécessairement de même du coefficient de localisation. Pour que ce dernier soit nul en effet, il faut que tout l'emploi du secteur soit réparti comme celui de l'ensemble des secteurs.

Théoriquement, on peut même avoir une corrélation parfaite (r^2 égal à 1) avec un coefficient de régression b qui serait négatif, ce qui suggérerait un effet de répulsion entre l'activité considérée et l'ensemble. En pratique, les analyses qui ont été faites sur les données du RÉEM n'ont produit aucun coefficient de corrélation spatiale négatif entre une activité et l'ensemble [11].

La seconde différence entre le coefficient de corrélation et le coefficient de localisation est que, dans le calcul de la «variance inexpliquée» $(1 - r^2)$, le poids accordé à chaque écart entre une variable et sa valeur prédite est proportionnel à ce même écart, tandis qu'au contraire, dans le calcul du coefficient de localisation, on accorde un poids égal à tous les écarts. Le coefficient de corrélation, c'est bien connu, est donc davantage influencé par les valeurs extrêmes des écarts.

11. Étant donné le niveau d'agrégation (18 secteurs), cela eût été surprenant. Même entre paires de secteurs, les quelques rares coefficients de corrélation négatifs étaient en deçà du seuil de signification.

La figure 1 permet de visualiser ces différences au moyen de l'exemple fictif présenté en introduction. En effet, on peut repérer dans cette figure les quartiers qui contribuent le plus à accroître le coefficient de localisation du secteur ou à diminuer son coefficient de corrélation spatiale avec l'ensemble. Géométriquement, le coefficient de localisation est égal à la somme des valeurs absolues des écarts verticaux entre les points du graphique et la droite «v = w».

Quant au coefficient de corrélation spatiale, il dépend des écarts verticaux entre les points du graphique et la droite de régression des parts des quartiers dans l'emploi du secteur sur les parts des quartiers dans l'emploi total (régression de v1 ou de v2 sur w) : la valeur de $1 - r^2$ est égale à la moyenne des carrés de ces écarts, divisée par la variance des parts des quartiers dans l'emploi du secteur.

Analyse théorique de l'effet d'un déplacement de l'emploi

On peut faire ressortir autrement la différence entre les deux indicateurs en examinant l'effet sur l'un et l'autre d'un déplacement de l'emploi entre les quartiers. Posons, pour simplifier l'écriture,

$$v_{ij} = x_{ij}/x_{.j}$$
$$w_i = x_{i.}/x_{..}$$
$$s_h = x_{.h}/x_{..}$$

Naturellement,

$$\sum_i v_{ih} = \sum_i w_i = 1$$

Supposons maintenant qu'une petite fraction f des emplois du secteur h dans chacun des quartiers se déplace vers le quartier k, de sorte que la nouvelle répartition des emplois du secteur h soit donnée par

$$v_{ih} = v^\circ_{ih}(1-f) \text{ pour i différent de k}$$
$$v_{kh} = v^\circ_{kh}(1-f) + f\sum_i v^\circ_{ih}$$

où les v°_{ih} donnent la répartition initiale des emplois et où $\sum_i v^\circ_{ih} = 1$, de sorte que

$$v_{kh} = v^\circ_{kh}(1-f) + f.$$

On a alors les dérivées

$$dv_{ih}/df = -v^\circ_{ih} \text{ pour i différent de k}$$
$$dv_{kh}/df = 1 - v^\circ_{kh}$$

et

$$dw_i/df = s_h\,(dv_{ih}/df)$$

et naturellement on a

$$\sum_i (dv_{ih}/df) = \sum_i (dw_i/df) = 0$$

Coefficient de localisation

Définissons les ensembles

$$A = \{ i \mid i \text{ différent de k et } v^\circ_{ih} > w^\circ_i \}$$
$$B = \{ i \mid i \text{ différent de k et } v^\circ_{ih} < w^\circ_i \}$$

où, sans perte de généralité, on ignore la possibilité qu'il existe i tel que $v^\circ_{ih} = w^\circ_i$.

La dérivée du coefficient de localisation par rapport à f est alors

$$dCL_h/df = (1 - s_h)\sum_{i\in B} v^\circ_{ih} \geq 0 \text{ si } v^\circ_{kh} > w^\circ_k$$
$$dCL_h/df = -(1 - s_h)\sum_{i\in A} v^\circ_{ih} \leq 0 \text{ si } v^\circ_{kh} < w^\circ_k$$

La démonstration suit.

On a

$$CL_h = \frac{1}{2}\sum_i \left| v_{ih} - w_i \right|$$

et on peut écrire

$$CL_h = \frac{1}{2}\left[\sum_{i\in A}(v_{ih} - w_i) - \sum_{i\in B}(v_{ih} - w_i) + \left| v_{kh} - w_k \right|\right]$$

Pour exprimer la dérivée du coefficient de localisation par rapport à f, il faut distinguer deux cas de figure : $v^\circ_{kh} > w^\circ_k$ et $v^\circ_{kh} < w^\circ_k$. Considérons d'abord le premier cas.

— Premier cas : $v^\circ_{kh} > w^\circ_k$

$$CL_h = \frac{1}{2}\left[\sum_{i\in A}(v_{ih} - w_i) + \sum_{i\in B}(w_i - v_{ih}) + (v_{kh} - w_k)\right]$$

où l'on remarque le signe positif devant le dernier terme, qui n'est plus en valeur absolue. La dérivée s'écrit alors

$$dCL_h/df = \tfrac{1}{2}[\sum_{i \in A} (-v^{\circ}_{ih})(1-s_h) - \sum_{i \in B} (-v^{\circ}_{ih})(1-s_h) + (1-s_h)(1-v^{\circ}_{kh})]$$

$$dCL_h/df = \tfrac{1}{2}[-\sum_{i \in A} v^{\circ}_{ih}(1-s_h) + \sum_{i \in B} v^{\circ}_{ih}(1-s_h) + (1-s_h)(1-v^{\circ}_{kh})]$$

C'est-à-dire, puisque $1 - v^{\circ}_{kh} - \sum_{i \in A} v^{\circ}_{ih} = \sum_{i \in B} v^{\circ}_{ih}$,

$$dCL_h/df = (1-s_h) \sum_{i \in B} v^{\circ}_{ih} \geq 0$$

— Second cas : $v^{\circ}_{kh} < w^{\circ}_k$

$$CL_h = \tfrac{1}{2}[\sum_{i \in A} (v_{ih} - w_i) + \sum_{i \in B} (w_i - v_{ih}) - (v_{kh} - w_k)]$$

où le dernier terme est affecté d'un signe négatif, ce qui conduit à :

$$dCL_h/df = -(1-s_h) \sum_{i \in A} v^{\circ}_{ih} \leq 0$$

(Q. E. D.)

La dérivée du coefficient de localisation par rapport à f est donc positive ou négative, selon que le déplacement de l'emploi vers le quartier k accentue ou diminue l'écart absolu entre la part de l'emploi du secteur qui se trouve dans le quartier, et la part de l'emploi total qui se trouve dans le quartier.

En termes géométriques, on peut dire de façon équivalente que la dérivée du coefficient de localisation par rapport à f est positive ou négative, selon que le point $(w^{\circ}_k, v^{\circ}_{kh})$ se situe dans le plan cartésien $[w_i, v_{ih}]$ [12] au-dessus ou au-dessous de la droite v = w.

On constate cependant que, sauf pour ce qui est de la définition des ensembles A et B (délimités par la droite v = w), cette dérivée est indépendante des w°_i et de la valeur initiale du coefficient de localisation. En particulier, la valeur de la dérivée n'est aucunement sensible à l'ampleur de l'écart entre v°_{kh} et w°_k, elle est sensible seulement à son signe : le coefficient de localisation ne sera ni plus, ni moins perturbé si l'emploi se déplace vers un quartier pour lequel l'écart entre v°_{kh} et w°_k est très grand que s'il se déplace vers un quartier pour lequel cet écart est faible.

12. La convention que nous adoptons est que les v_{ih} sont repérés sur l'axe vertical, tandis que les w_i sont repérés sur l'axe horizontal.

Coefficient de corrélation spatiale

L'analyse de l'effet sur r^2 d'un déplacement de l'emploi vers un quartier donné est beaucoup plus complexe. En effet, la dérivée de r^2 par rapport à f est donnée par [13]

$$dr^2/df = (2r^2/n)[A\, v^{\circ}_{kh} + B\, w^{\circ}_k + C]$$

avec
$$A = s_h/\sigma_{vw} - 1/\sigma^2_v$$
$$B = 1/\sigma_{vw} - s_h/\sigma^2_w$$
$$C = -A\, n(\sigma^2_v + 1/n^2) - B\, n(\sigma_{vw} + 1/n^2)$$

L'effet sur r^2 d'un déplacement de l'emploi du secteur h vers le quartier k, en provenance de l'ensemble des quartiers, dépend du signe de la dérivée dr^2/df.

Nous venons de voir que dCL_h/df est positive ou négative, selon que le point $(w^{\circ}_k, v^{\circ}_{kh})$ se situe dans le plan cartésien $[w_i, v_{ih}]$ au-dessus ou au-dessous de la droite v = w. De même, dr^2/df est positive ou négative selon que le point $(w^{\circ}_k, v^{\circ}_{kh})$ se situe d'un côté ou de l'autre de la droite $dr^2/df = 0$.

Hélas ! la position dans le plan cartésien $[w_i, v_{ih}]$ de la droite $dr^2/df = 0$ est moins facile à caractériser que celle de la droite v = w; en outre, c'est tantôt d'un côté de la droite $dr^2/df = 0$, tantôt de l'autre, que la dérivée est positive. Pour arriver à une vision synthétique de la question, nous allons recourir à une représentation géométrique à trois dimensions.

Dans l'espace à trois dimensions [w, v, y], la fonction

$$y = (2r^2/n)[A\, v + B\, w + C]$$

est un plan. Nous désignons ce plan par l'expression «$y = dr^2/df$» [14]. Si le point $(w^{\circ}_k, v^{\circ}_{kh}, y)$ du plan $y = dr^2/df$ se trouve au-dessus du plan y = 0, alors la dérivée dr^2/df est positive au point $(w^{\circ}_k, v^{\circ}_{kh})$, et un déplacement de l'emploi du secteur h vers le quartier k aura pour effet d'augmenter r^2; inversement, si le point $(w^{\circ}_k, v^{\circ}_{kh}, y)$ se trouve au-dessous du plan y = 0, alors la dérivée dr^2/df est négative au point $(w^{\circ}_k, v^{\circ}_{kh})$, et un déplacement de l'emploi du secteur h vers le quartier k aura pour effet de diminuer r^2.

13. La démonstration est donnée en annexe.
14. Strictement parlant, l'égalité

$$y = dr^2/df$$

n'est vraie que pour des paires de valeurs (w, v) qui correspondent à une observation $(w^{\circ}_i, v^{\circ}_{ih})$.

L'intersection du plan $y = dr^2/df$ avec le plan horizontal $y = 0$ est donnée par la droite $dr^2/df = 0$, qui s'écrit

$$A\,v + B\,w + C = 0$$

Cette droite partage le plan en deux; d'un côté de la droite $dr^2/df = 0$, la dérivée dr^2/df est positive et de l'autre, négative.

Notons — cela nous sera utile plus loin — que la droite $dr^2/df = 0$ passe toujours par un point défini par

$$w^* = n(\sigma_{vw} + 1/n^2) = n\,\sigma_{vw} + 1/n$$
$$v^* = n(\sigma_v^2 + 1/n^2) = n\,\sigma_v^2 + 1/n$$

situé sur la droite de régression de w_i sur v_{ih} dans le plan cartésien $[w_i, v_{ih}]$ [15].

La situation du plan $y = dr^2/df$ dans l'espace, de même que la situation de la droite $dr^2/df = 0$ et du point (w^*, v^*) dans le plan cartésien $[w_i, v_{ih}]$, dépend des quatre paramètres s_h, σ_v^2, σ_w^2 et σ_{vw} [16] ou, plus exactement, des relations entre ces quatre paramètres. Mais on ne peut pas considérer σ_w^2 et σ_{vw} comme véritablement indépendants de s_h. C'est pourquoi, pour faciliter l'analyse paramétrique, nous reformulons le système en termes de paramètres indépendants. Voyons cela de plus près.

Aux notations déjà convenues, ajoutons :

$$u_i = (x_{i.} - x_{ih})/(x_{..} - x_{.h})$$

La variable u_i est donc la part de l'emploi de l'ensemble des activités autres que h qui se trouve dans le quartier i.

Cela étant posé, il semble naturel de considérer comme constante la répartition spatiale des emplois des secteurs d'activité autres que h. Les u_i sont donc fixes, de même que, bien sûr, les v_{ih}°. Et on a

$$w_i = s_h\,v_{ih} + (1 - s_h)\,u_i$$

d'où il découle

$$\sigma_w^2 = s_h^2\,\sigma_v^2 + (1 - s_h)^2\,\sigma_u^2 + 2\,s_h\,(1 - s_h)\,\sigma_{uv}$$
$$\sigma_{vw} = s_h\,\sigma_v^2 + (1 - s_h)\,\sigma_{uv}$$
$$\sigma_{uw} = (1 - s_h)\,\sigma_u^2 + s_h\,\sigma_{uv}$$

15. La convention que nous adoptons est que les v_{ih} sont repérés sur l'axe vertical, tandis que les w_i sont repérés sur l'axe horizontal. Il est intéressant de noter que w^* est la valeur de l'indice Herfindahl de concentration, défini comme
$$H_h = \sum_i v_{ih}^2 = n\,\sigma_v^2 + 1/n.$$
Voir Lemelin (1991).

16. Ces paramètres dépendent à leur tour des observations x_{ij}°.

Nous considérons donc que les paramètres fondamentaux du système sont s_h, σ_u^2, σ_v^2 et σ_{uv}, plutôt que s_h, σ_v^2, σ_w^2 et σ_{vw}.

On peut faire la synthèse des résultats [17] en décrivant en termes géométriques ce qui se passe à mesure que la covariance σ_{uv} diminue le long de l'intervalle $[-\sigma_u\sigma_v, \sigma_u\sigma_v]$ [18]. Étant donné s_h, σ_u et σ_v, cet intervalle est ponctué de seuils qui marquent le passage d'un cas de figure à un autre.

Posons

$$z_v = s_h\,\sigma_v^2/(1 - s_h)$$

$$z_u = (1 - s_h)\,\sigma_u^2/s_h$$

Ces valeurs sont remarquables par le fait que, lorsque $\sigma_{uv} = -z_u$, $\sigma_{uw} = 0$, et que, lorsque $\sigma_{uv} = -z_v$, $\sigma_{vw} = 0$.

On peut alors définir quatre cas de figure, selon la position de la covariance σ_{uv} le long de l'intervalle $[-\sigma_u\sigma_v, \sigma_u\sigma_v]$:

1) $0 \leq \sigma_{uv} < \sigma_u\sigma_v$

2) $\max[-z_v, -z_u] \leq \sigma_{uv} < 0$

3A) $-z_u < -\sigma_u\sigma_v < \sigma_{uv} < -z_v < 0$

3B) $-z_v < -\sigma_u\sigma_v < \sigma_{uv} < -z_u < 0$

On peut considérer le cas 3B comme moins probable, car ce cas ne peut se réaliser que si

$$z_v > z_u$$

c'est-à-dire si $s_h\,\sigma_v > (1 - s_h)\,\sigma_u$. Or normalement, le rapport $s_h/(1 - s_h)$ est petit. Par conséquent, le cas 3B ne peut se réaliser que si le rapport σ_v^2/σ_u^2 est grand, c'est-à-dire si le secteur h est beaucoup plus concentré que l'ensemble des autres activités [19].

En pratique, les dix-huit secteurs étudiés au tableau 1 appartiennent tous, sans exception, au cas 1.

Voici donc une description géométrique de ce qui se passe à mesure que la covariance σ_{uv} diminue le long de l'intervalle $[-\sigma_u\sigma_v, \sigma_u\sigma_v]$. Nous considérerons successivement :

— les deux droites de régression $v = a + b\,w$ (régression de v_{ih} sur w_i), et $w = \alpha + \beta\,v$ (régression de w_i sur v_{ih});

17. Les développements mathématiques conduisant à ces résultats sont donnés en détail dans Lemelin (1992).

18. Les deux termes de cet intervalle sont évidemment les valeurs extrêmes que peut prendre la covariance σ_{uv}.

19. Car on peut interpréter la variance σ_v^2 comme une mesure de la concentration. Voir la note 15.

— la droite $dr^2/df = 0$;
— le plan $y = dr^2/df$.

Dans le plan cartésien $[w_i, v_{ih}]$, les deux droites de régression coïncident initialement, lorsque la corrélation est parfaite (c'est-à-dire quand $\sigma_{uv} = \sigma_u\sigma_v$); elles pivotent ensuite sur le point (1/n, 1/n), à mesure que la covariance σ_{uv} diminue, dans le sens horaire pour la droite de régression de v_{ih} sur w_i, et dans le sens anti-horaire pour la droite de régression de w_i sur v_{ih}. Le point (w^*, v^*), situé sur cette dernière droite de régression au-dessus du point pivot, se déplace donc horizontalement de droite à gauche.

Toujours dans le plan cartésien $[w_i, v_{ih}]$, la droite $dr^2/df = 0$ coïncide initialement, lorsque la corrélation est parfaite, avec les deux droites de régression. Puis, à mesure que la covariance σ_{uv} diminue, elle pivote elle aussi dans le sens anti-horaire, mais sur le point mobile (w^*, v^*) [20]. Tant que σ_{uv} est positive, la pente de la droite $dr^2/df = 0$ est supérieure à celle de la droite de régression de w_i sur v_{ih} [21]. Quand σ_{uv} atteint le seuil critique de zéro, la droite $dr^2/df = 0$ est verticale. La droite $dr^2/df = 0$ continue ensuite de pivoter sur le point mobile (w^*, v^*), jusqu'à rattraper les droites de régression et à se confondre avec elles quand σ_{uv} atteint sa valeur limite de $-\sigma_u\sigma_v$ [22].

Dans l'espace à trois dimensions [w, v, y], en même temps que la droite $dr^2/df = 0$ se déplace dans le plan $y = 0$, elle sert d'axe au plan $y = dr^2/df$, qui effectue une rotation sur cet axe mobile. Pour les valeurs de σ_{uv} supérieures à $-z_v$ (c'est-à-dire quand σ_{vw} est positive), la pente du plan $y = dr^2/df$ est orientée de telle manière que ce dernier passe au-dessous du point (1/n, 1/n, 0). La pente du plan devient nulle (le plan $y = dr^2/df$ coïncide avec le plan $y = 0$) lorsque $\sigma_{uv} = -z_v$ (c'est-à-dire $\sigma_{vw} = 0$), et négative par la suite.

Rappelons que si le point $(w_k^\circ, v_{kh}^\circ, y)$ du plan $y = dr^2/df$ se trouve au-dessus du plan $y = 0$, alors un déplacement de l'emploi du secteur h vers le quartier k aura pour effet d'augmenter r^2; inversement, si le point $(w_k^\circ, v_{kh}^\circ, y)$ se trouve au-dessous du plan $y = 0$, alors un déplacement de l'emploi du secteur h vers le quartier k aura pour effet de diminuer r^2.

Les résultats qui précèdent n'ont pas d'interprétation intuitivement évidente. Ils sont même à certains égards plutôt déroutants. Par exemple, supposons que $\sigma_u\sigma_v > \sigma_{uv} > 0$ et que le point $(w_k^\circ, v_{kh}^\circ)$ se situe dans le plan $[w_i, v_{ih}]$ *au-dessous*, à la fois de la droite de régression de v_{ih} sur w_i et de celle de w_i sur v_{ih}. Alors un accroissement de la part de l'emploi du secteur h dans le quartier k aura pour effet de *rapprocher* le point correspondant de chacune des deux droites de régression. Pourtant, cet accroissement aura pour effet de faire *diminuer* r^2, à moins que le point $(w_k^\circ, v_{kh}^\circ)$ se situe aussi *au-dessous* de la droite $dr^2/df = 0$ [23].

20. On ne peut pas affirmer cependant que la pente de la droite $dr^2/df = 0$ augmente de façon monotone en fonction de σ_{uv}. D'abord, il y a une discontinuité au point $\sigma_{uv} = 0$. Ensuite, on peut montrer que, sur un certain intervalle au voisinage de $\sigma_{uv} = -z_v$, la pente, qui est alors négative, diminue (augmente en valeur absolue) à mesure que σ_{uv} diminue.
21. Étant donné la convention selon laquelle les v_{ih} sont repérés sur l'axe vertical dans le plan cartésien $[w_i, v_{ih}]$, la pente de cette droite de régression est donnée par $1/\beta$.
22. Selon que z_u est supérieur ou inférieur à z_v, les trois droites auront alors une pente négative ou positive.

Illustration : l'industrie manufacturière légère à Montréal

Tout cela est illustré à la figure 3, qui se rapporte à l'industrie manufacturière légère. La figure comporte deux parties : on trouve les quartiers ayant moins de 2 % de l'emploi total dans la partie «a», et les autres dans la partie «b».

Supposons que l'on «prélève» des emplois de ce secteur dans tous les quartiers, proportionnellement au niveau d'emploi initial, et qu'on réalloue ces emplois à un seul quartier. L'effet sur le coefficient de localisation et sur le coefficient de corrélation spatiale serait alors le suivant :

1) Pour un quartier correspondant à un point situé à gauche et en haut de la ligne brisée OAB : CL augmente et r^2 diminue.

2) Pour un quartier correspondant à un point situé à droite et en bas de la ligne brisée DAC : CL diminue et r^2 augmente.

3) Pour un quartier correspondant à un point situé dans le triangle OAD : CL et r^2 diminuent.

4) Pour un quartier correspondant à un point situé à l'intérieur de l'angle formé par les segments de droite AB et AC : CL et r^2 augmentent.

Conclusion

Le but de cette note était de comparer les propriétés et l'interprétation de deux indicateurs : le coefficient de localisation et le coefficient de corrélation spatiale. Ce sont deux mesures de similitude ou de déviance de la répartition spatiale d'une activité par rapport à l'ensemble des activités.

À l'aide de données sur la localisation des activités économiques à Montréal, nous avons montré que les deux indicateurs ne concordaient pas toujours. En particulier, nous avons trouvé des exemples de secteurs

23. Cette situation n'est pas que théorique : à la figure 3a, dont il est question ci-après, il y a cinq observations qui possèdent ces caractéristiques.

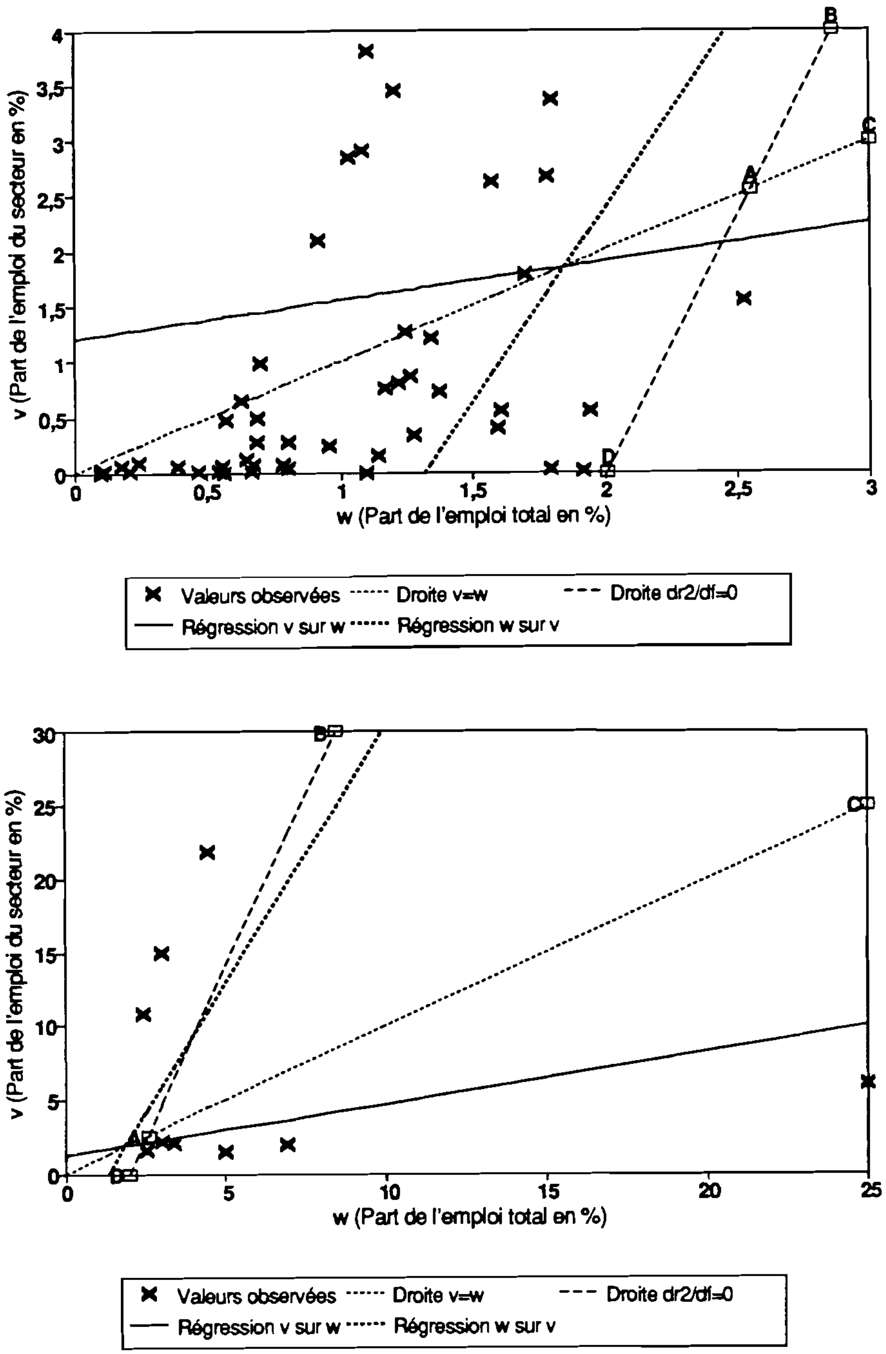

FIGURE 3 — Part de l'emploi par quartier, industrie manufacturière légère

ayant des coefficients de localisation assez forts dont les coefficients de corrélation spatiale étaient néanmoins élevés.

Il est vrai que les mesures examinées sont toutes deux fonction des écarts entre la part observée de chaque quartier dans l'emploi d'une activité donnée, et une certaine valeur de référence. Mais il y a deux différences essentielles qui expliquent les divergences entre elles. D'abord, quant au choix de la valeur de référence, le coefficient de corrélation utilise un modèle de localisation où une fraction de l'emploi d'une activité se répartit uniformément entre les quartiers, tandis que le reste est distribué identiquement à l'emploi de l'ensemble des activités. Le coefficient de localisation se réfère uniquement à la répartition de l'emploi de l'ensemble. La seconde différence est que, dans le calcul de la «variance inexpliquée» ($1 - r^2$), le poids accordé à chaque écart est proportionnel à ce même écart, tandis qu'au contraire, dans le calcul du coefficient de localisation, on accorde un poids égal à tous les écarts.

Nous avons aussi fait une analyse théorique de l'effet sur l'un et l'autre indicateur d'un déplacement de l'emploi entre les quartiers. Nous avons réussi à caractériser mathématiquement cet effet. Toutefois, en ce qui concerne le coefficient de corrélation, nos résultats n'ont pas d'interprétation intuitivement évidente; ils sont même à certains égards plutôt déroutants. Cette question reste à approfondir.

Références

Aydalot, Philippe. 1985. *Économie régionale et urbaine*. Paris, Economica.

Isard, Walter. 1960. *Methods of Regional Analysis: An Introduction to Regional Science*. Cambridge (Mass.), MIT Press, 784 p.

Lemelin, André. 1990. *Montréal économique. Organisation spatiale des activités économiques et structure de l'emploi par quartier*. Étude réalisée dans le cadre de l'Entente entre la Ville de Montréal et l'INRS-Urbanisation. Montréal, Ville de Montréal et INRS-Urbanisation.

Lemelin, André. 1991. «La logique du déploiement des activités économiques dans l'espace urbain de Montréal», *L'Actualité économique*, 67, 4 (décembre) : 439-457.

Lemelin, André. 1992. «Le coefficient de localisation et le coefficient de corrélation spatiale : une comparaison» (avec annexe mathématique détaillée), Montréal, INRS-Urbanisation, février.

Annexe mathématique : effet d'un déplacement de l'emploi sur r^2

— *Notation*

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$v_{ij} = x_{ij}/x_{.j}$$
$$s_j = x_{.j}/x_{..}$$
$$w_i = x_{i.}/x_{..} = \sum_j s_j\, v_{ij}$$

où :

x_{ij} = l'emploi du secteur j dans le quartier i.
$x_{.j}$ = l'emploi du secteur j dans tous les quartiers.
$x_{i.}$ = l'emploi de tous les secteurs dans le quartier i.
$x_{..}$ = l'emploi de tous les secteurs dans tous les quartiers.

Naturellement

$$\sum_i v_{ih} = \sum_i w_i = 1$$

Aux notations déjà convenues, ajoutons :

$$u_i = (x_{i.} - x_{ih})/(x_{..} - x_{.h})$$

de sorte que

$$w_i = s_h\, v_{ih} + (1 - s_h)\, u_i$$

Supposons maintenant qu'un petit nombre d'emplois du secteur h provenant de chacun des quartiers se déplace vers le quartier k, de sorte que la nouvelle répartition des emplois du secteur h soit donnée par

$$v_{ih} = v^{\circ}_{ih}\,(1 - f) + f \text{ pour } i = k$$

$$v_{ih} = v^{\circ}_{ih}\,(1 - f) \text{ autrement}$$

où les v°_{ih} donnent la répartition initiale des emplois.

On a alors les dérivées

$$dv_{ih}/df = 1 - v^{\circ}_{kh} \text{ pour } i = k \text{ et}$$
$$dv_{ih}/df = -\,v^{\circ}_{ih} \text{ autrement;}$$

et

$$dw_i/df = s_h\,(dv_{ih}/df)$$

et naturellement on a

$$\sum_i (dv_{ih}/df) = \sum_i (dw_i/df) = 0$$

— *La dérivée dr^2/df*

Nous cherchons à expliciter l'expression de dr^2/df [24]. Avant de développer cette expression, rappelons d'abord que

$$r^2 = \sigma^2_{vw} / (\sigma^2_v \sigma^2_w)$$

$$\sigma^2_v = \left(\sum_i v^2_{ih}/n - V^2 \right)$$

$$\sigma^2_w = \left(\sum_i w^2_i/n - W^2 \right)$$

$$\sigma_{vw} = \left(\sum_i v_{ih} w_i/n - VW \right)$$

V et W représentent les moyennes $\sum_i$

$$V = \sum_i v_{ih}/n = 1/n$$

$$W = \sum_i w_i/n = 1/n$$

À partir de la définition de r^2, on a la différentielle

$$d(\log r^2) = dr^2/r^2$$

$$d(\log r^2) = 2(d\sigma_{vw}/\sigma_{vw}) - d\sigma^2_v/\sigma^2_v - d\sigma^2_w/\sigma^2_w$$

De même, à partir des définitions, et gardant à l'esprit que V et W sont des constantes, on a

$$d\sigma_{vw} = (1/n) \sum_i (v_{ih}\, dw_i + w_i\, dv_{ih})$$

Or $w_i = \sum_j s_j\, v_{ij}$ et, pour tout j différent de h, $v_{ij} = v^{\circ}_{ij}$ (une constante), de sorte que $dw_i = s_h\, dv_{ih}$ et

$$d\sigma_{vw} = (1/n) \sum_i (v_{ih}\, s_h\, dv_{ih} + w_i\, dv_{ih})$$

$$d\sigma_{vw} = (1/n) \sum_i (v_{ih}\, s_h + w_i)\, dv_{ih}$$

On a aussi

$$d\sigma^2_v = (1/n) \sum_i 2\, v_{ih}\, dv_{ih}$$

$$d\sigma^2_v = (2/n) \sum_i v_{ih}\, dv_{ih}$$

Et

$$d\sigma^2_w = (1/n) \sum_i 2\, w_i\, dw_i$$

$$d\sigma^2_w = (2/n) \sum_i w_i\, s_h\, dv_{ih}$$

24. Je suis redevable à Jacques Ledent de m'avoir suggéré une voie de développement beaucoup plus élégante et concise que celle, très lourde, que j'avais suivie initialement.

En regroupant les résultats, on obtient

$$dr^2/r^2 = (2/n) \sum_i [(v_{ih}\, s_h + w_i)/\sigma_{vw} - v_{ih}/\sigma_v^2 - w_i\, s_h/\sigma_w^2]\, dv_{ih}$$

$$dr^2/r^2 = (2/n) \sum_i [(s_h/\sigma_{vw} - 1/\sigma_v^2)\, v_{ih} + (1/\sigma_{vw} - s_h/\sigma_w^2)\, w_i\,]\, dv_{ih}$$

Posons, pour alléger l'écriture,

$$A = s_h/\sigma_{vw} - 1/\sigma_v^2$$

$$B = 1/\sigma_{vw} - s_h/\sigma_w^2$$

Et on peut écrire

$$dr^2/r^2 = (2/n) \sum_i (A\, v_{ih} + B\, w_i)\, dv_{ih}$$

On obtient la dérivée recherchée en multipliant les deux membres de l'équation par r^2 et en prenant le rapport des différentielles dr^2 et df :

$$dr^2/df = (2r^2/n) \sum_i (A\, v_{ih} + B\, w_i)\, dv_{ih}/df$$

On veut évaluer cette dérivée lorsque $v_{ih} = v_{ih}^{\circ}$ et $w_i = w_i^{\circ}$. En remplaçant les v_{ih}, w_i et dv_{ih}/df par leur valeur, on trouve

$$dr^2/df = (2r^2/n)\, [A\, v_{kh}^{\circ} + B\, w_k^{\circ} - \sum_i (A\, v_{ih}^{\circ} + B\, w_i^{\circ})\, v_{ih}^{\circ}]$$

$$dr^2/df = (2r^2/n)\, [A\, v_{kh}^{\circ} + B\, w_k^{\circ} - A \sum_i (v_{ih}^{\circ})^2 - B \sum_i v_{ih}^{\circ} w_i^{\circ}]$$

où, étant donné les définitions de σ_v^2 et σ_{vw}, on reconnaît

$$\sum_i (v_{ih}^{\circ})^2 = n\, (\sigma_v^2 + 1/n^2)$$

$$\sum_i v_{ih}^{\circ} w_i^{\circ} = n\, (\sigma_{vw} + 1/n^2)$$

Donc,

$$dr^2/df = (2r^2/n)\, [A\, v_{kh}^{\circ} + B\, w_k^{\circ} - A\, n\, (\sigma_v^2 + 1/n^2) - B\, n\, (\sigma_{vw} + 1/n^2)]$$

Pour alléger l'écriture, posons

$$C = -A\, n\, (\sigma_v^2 + 1/n^2) - B\, n\, (\sigma_{vw} + 1/n^2)$$

Et on peut écrire

$$dr^2/df = (2r^2/n)\, [A\, v_{kh}^{\circ} + B\, w_k^{\circ} + C]$$